Combinações com repetição

Raquel de Souza Francisco Bravo
e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

22 de setembro de 2016

Conteúdo:

- Introdução
- Combinação com repetição
- Número de combinações com repetição

Combinações com repetição: Introdução

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Combinações com repetição: Introdução

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Resolução 1:

Raciocínio 1

$$\underline{\quad}_{p_1} \quad \underline{\quad}_{p_2} \quad \underline{\quad}_{p_3} \quad \underline{\quad}_{p_4} \quad \underline{\quad}_{p_5} \quad \underline{\quad}_{p_6} \quad \underline{\quad}_{p_7} \quad \underline{\quad}_{p_8}$$

Combinações com repetição: Introdução

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Resolução 1:

Raciocínio 1

- Ilustração

1	0	0	1	0	0	0	1
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Combinações com repetição: Introdução

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Resolução 1:

Raciocínio 1

- Ilustração

1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Combinações com repetição: Introdução

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Resolução 1:

Raciocínio 1

- Ilustração

1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

- Observação:

  Cada possibilidade corresponde a uma seqüência de 8 binários com três 1's e cinco 0's.

Combinações com repetição: Introdução

Exemplo 1 (revisão):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Resolução 1:

Raciocínio 1 (usando permutações com repetição)

- Ilustração

1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

- Observação:

  Cada possibilidade corresponde a uma seqüência de 8 binários com três 1's e cinco 0's.

Combinações com repetição

Exemplo 1 (raciocínio 1):

- Reformulação 1

  Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente três 1's e cinco 0's podem ser formados?

  elementos: binários (0, 1)

Combinações com repetição

Exemplo 1 (raciocínio 1):

- Reformulação 1

  Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente três 1's e cinco 0's podem ser formados?

  elementos: binários (0, 1)

  Resposta 1:

  O número de seqüências de 8 binários com 3 iguais a 1 e 5 iguais a 0 corresponde ao número de permutações com repetição de 8 elementos com 3 iguais a 1 e 5 iguais a 0, ou seja, $P_8^{3,5} = \frac{8!}{3!\ 5!} = 56$

Exemplo 1 (continuação):

- Observação:

  Outros enunciados equivalentes:

Exemplo 1 (continuação):

- Observação:

  Outros enunciados equivalentes:

  1 - Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente três 1's podem ser formuladas?

Combinações com repetição

Exemplo 1 (continuação):

- Observação:

  Outros enunciados equivalentes:

  1 - Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente três 1's podem ser formuladas?

  2 - Quantas seqüências de 8 números binários com exatamente cinco 0's podem ser formuladas?

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Combinações com repetição

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2:

- Ilustração

$$\underline{\quad\quad}\quad\underline{\quad\quad}\quad\underline{\quad\quad}\quad\underline{\quad\quad}\quad\underline{\quad\quad}\quad\underline{\quad\quad}\quad\underline{\quad\quad}\quad\underline{\quad\quad}$$
$$p_1\quad\quad p_2\quad\quad p_3\quad\quad p_4\quad\quad p_5\quad\quad p_6\quad\quad p_7\quad\quad p_8$$

Combinações com repetição

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2:

- Ilustração

	1			1	1		
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Combinações com repetição

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2:

- Ilustração

0	1	0	0	1	1	0	0
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Combinações com repetição

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2:

- Ilustração

$$\underset{p_1}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{p_2}{\underline{\;1\;}}\quad \underset{p_3}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{p_4}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{p_5}{\underline{\;1\;}}\quad \underset{p_6}{\underline{\;1\;}}\quad \underset{p_7}{\underline{\;0\;}}\quad \underset{p_8}{\underline{\;0\;}}$$

Atenção: <u>Fixadas</u> as posições para os três 1's <u>automaticamente</u> estão <u>fixadas</u> as posições para os cinco 0's

Combinações com repetição

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2:

- Ilustração

0	1	0	0	1	1	0	0
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Atenção: Fixadas as posições para os três 1's automaticamente estão fixadas as posições para os cinco 0's

⇨ Reformulação 2

De quantos modos podemos selecionar 3 posições entre 8?

Combinações com repetição

Exemplo 1 (resolução 2):

De quantos modos podemos colocar três binários iguais a 1 e cinco iguais a 0 em 8 posições?

Raciocínio 2: **(usando combinações simples)**

- Ilustração

0	1	0	0	1	1	0	0
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8

Atenção: Fixadas as posições para os três 1's automaticamente estão fixadas as posições para os cinco 0's

⇨ Reformulação 2

De quantos modos podemos selecionar 3 posições entre 8?

Elementos diferentes: posições (p_1, p_2, …, p_8)

Combinações com repetição

Exemplo 1 (continuação raciocínio 2):

Resposta 2:

O número de combinações simples de 8 elementos tomados 3 a 3 é $C(8,3) = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$

Combinações com repetição

Exemplo 1 (continuação raciocínio 2):

Resposta 2:

O número de combinações simples de 8 elementos tomados 3 a 3 é $C(8,3) = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$

Resposta exemplo 1: Podemos colocar três 1's e cinco 0's em 8 posições de 56 modos diferentes.

Combinações com repetição

Exemplo 1 (continuação raciocínio 2):

Resposta 2:

O número de combinações simples de 8 elementos tomados 3 a 3 é $C(8,3) = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$

Resposta exemplo 1: Podemos colocar três 1's e cinco 0's em 8 posições de 56 modos diferentes.

- Observações:

  1 - Podemos fazer um raciocínio similar fixando agora as posições correspondentes aos cinco 0's

Combinações com repetição

Exemplo 1 (continuação raciocínio 2):

Resposta 2:

O número de combinações simples de 8 elementos tomados 3 a 3 é $C(8,3) = \dfrac{8!}{3!\,(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!\,5!} = 56$

Resposta exemplo 1: Podemos colocar três 1's e cinco 0's em 8 posições de 56 modos diferentes.

- Observações:

  1 - Podemos fazer um raciocínio similar fixando agora as posições correspondentes aos cinco 0's

  (automaticamente estão fixadas as posições dos 1's, e obtemos como resultado $C(8,5)$)

Combinações com repetição

Exemplo 1 (continuação raciocínio 2):

Resposta 2:

O número de combinações simples de 8 elementos tomados 3 a 3 é $C(8,3) = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$

Resposta exemplo 1: Podemos colocar três 1's e cinco 0's em 8 posições de 56 modos diferentes.

- Observações:

1 - Podemos fazer um raciocínio similar fixando agora as posições correspondentes aos cinco 0's

(automaticamente estão fixadas as posições dos 1's, e obtemos como resultado $C(8,5)$)

2 - $P_8^{5,3} = C(8,5) = C(8,8-5) = C(8,3) = \frac{8!}{5!\,3!}$

Combinações com repetição

Exemplo 2: (Modelo matemático)

Queremos determinar o número de sequências binárias finalizadas em **1** que podem ser formadas com cinco 0's e três 1's, que denominamos N.

Combinações com repetição

Exemplo 2: (Modelo matemático)

Queremos determinar o número de sequências binárias finalizadas em **1** que podem ser formadas com cinco 0's e três 1's, que denominamos N.

- Ilustração

$$\underline{\quad}_{p_1}\ \underline{\quad}_{p_2}\ \underline{\quad}_{p_3}\ \underline{\quad}_{p_4}\ \underline{\quad}_{p_5}\ \underline{\quad}_{p_6}\ \underline{\quad}_{p_7}\ \underline{\quad}_{p_8}$$

Combinações com repetição

Exemplo 2: (Modelo matemático)

Queremos determinar o número de sequências binárias finalizadas em **1** que podem ser formadas com cinco 0's e três 1's, que denominamos N.

- Ilustração

$$\underbrace{\underline{\quad}_{p_1}\ \underline{\quad}_{p_2}\ \underline{\quad}_{p_3}\ \underline{\quad}_{p_4}\ \underline{\quad}_{p_5}\ \underline{\quad}_{p_6}\ \underline{\quad}_{p_7}}\ \underline{\ 1\ }_{p_8}$$

⇨ Reformulação do problema

De quantos modos podemos colocar dois 1's e cinco 0's em 7 posições?

Combinações com repetição

Exemplo 2: (Modelo matemático)

Queremos determinar o número de sequências binárias finalizadas em **1** que podem ser formadas com cinco 0’s e três 1’s, que denominamos N.

- Ilustração

$$\underbrace{\underline{\quad}_{p_1}\ \underline{\quad}_{p_2}\ \underline{\quad}_{p_3}\ \underline{\quad}_{p_4}\ \underline{\quad}_{p_5}\ \underline{\quad}_{p_6}\ \underline{\quad}_{p_7}}\ \overset{1}{\underline{\quad}}_{p_8}$$

⇒ Reformulação do problema

De quantos modos podemos colocar dois 1’s e cinco 0’s em 7 posições?

Resposta: $N = C(7,2) = C(7,5) = 21$

Combinações com repetição

Exemplo 2: (Modelo matemático)

Queremos determinar o número de sequências binárias finalizadas em **1** que podem ser formadas com cinco 0’s e três 1’s, que denominamos N.

- Ilustração

$$\underbrace{\underset{p_1}{\underline{\quad}}\ \underset{p_2}{\underline{\quad}}\ \underset{p_3}{\underline{\quad}}\ \underset{p_4}{\underline{\quad}}\ \underset{p_5}{\underline{\quad}}\ \underset{p_6}{\underline{\quad}}\ \underset{p_7}{\underline{\quad}}}\ \underset{p_8}{\underline{\overset{1}{\quad}}}$$

- Reformulação do problema

  De quantos modos podemos colocar dois 1’s e cinco 0’s em 7 posições?

  Resposta: $N = C(7,2) = C(7,5) = 21$

- Observação: $7 = \underbrace{3}_{\text{número de 1's}} + \underbrace{5}_{\text{número de 0's}} - \underbrace{1}_{\text{fixado 1}}$ $\qquad 2 = 3 - 1$

Exemplo 3:

De quantos modos podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas?

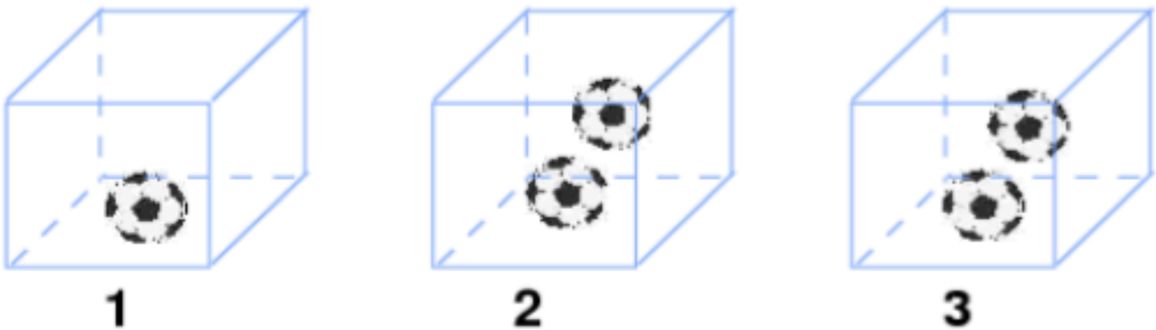
Combinações com repetição

Exemplo 3:

De quantos modos podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas?

Resolução:

- Ilustração 1

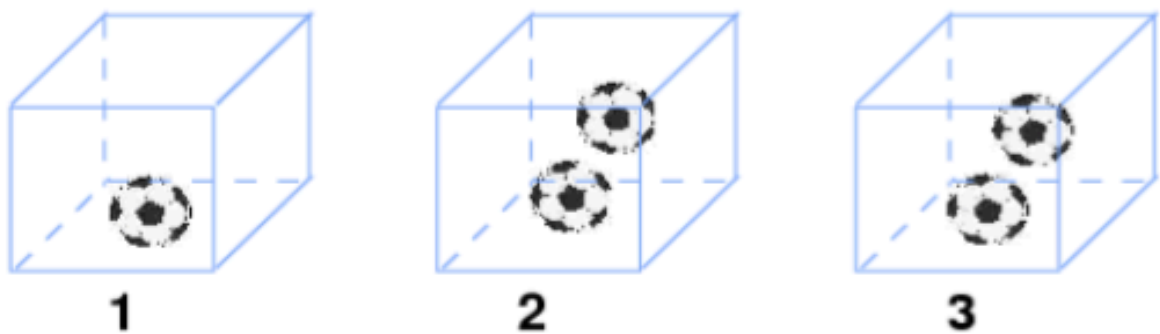


Exemplo 3:

De quantos modos podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas?

Resolução:

- Ilustração 1



Representação matemática

significa

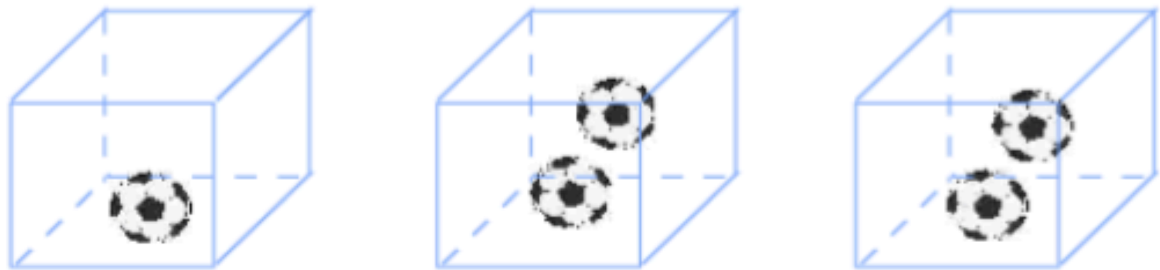
0

Exemplo 3:

De quantos modos podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas?

Resolução:

- Ilustração 1



1 2 3

Representação matemática

 ⟵ significa ⟶ 0

 ⟵ significa ⟶ 1

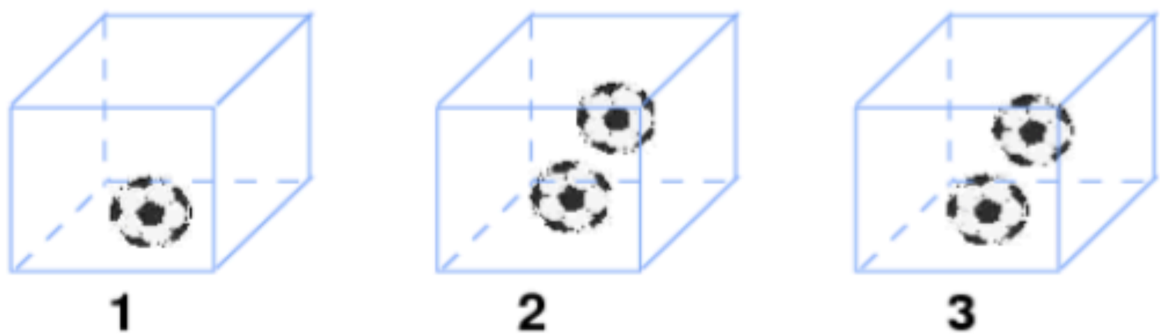
Combinações com repetição

Exemplo 3:

De quantos modos podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas?

Resolução:

- Ilustração 1



Representação matemática

 ←significa→ 0

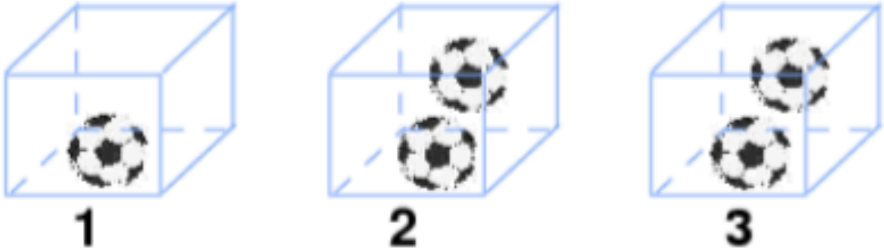
 ←significa→ 1

possibilidade ←significa→ seqüência de binários

Combinações com repetição

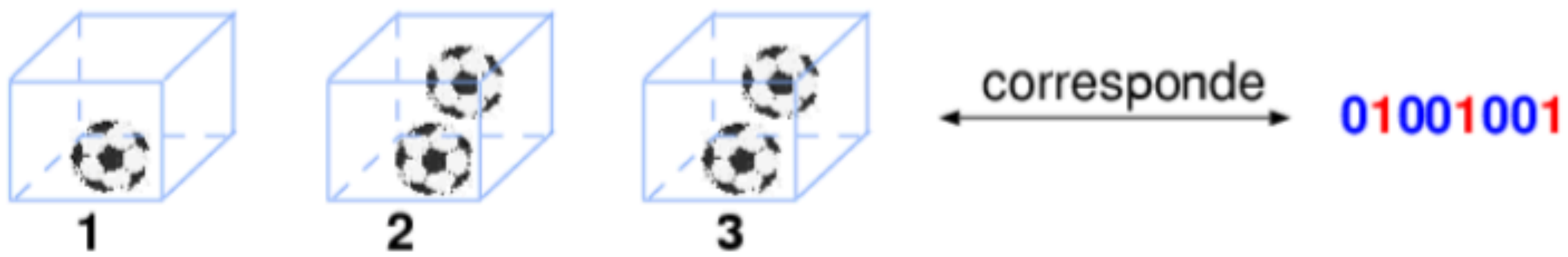
Exemplo 3 (continuação):

- Ilustração 1



Exemplo 3 (continuação):

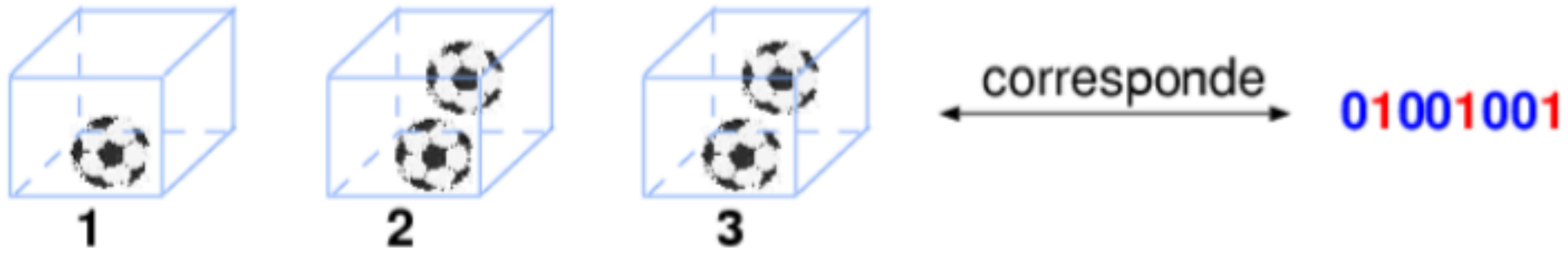
- Ilustração 1



Combinações com repetição

Exemplo 3 (continuação):

- Ilustração 1

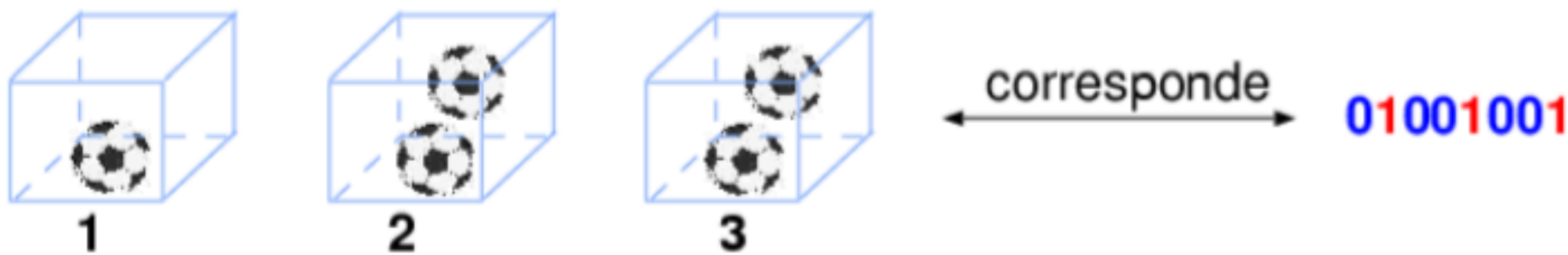


Uma possibilidade do problema está associada a uma sequência de 3 + 5 binários, finalizada em 1 com o seguinte significado:

Combinações com repetição

Exemplo 3 (continuação):

- Ilustração 1

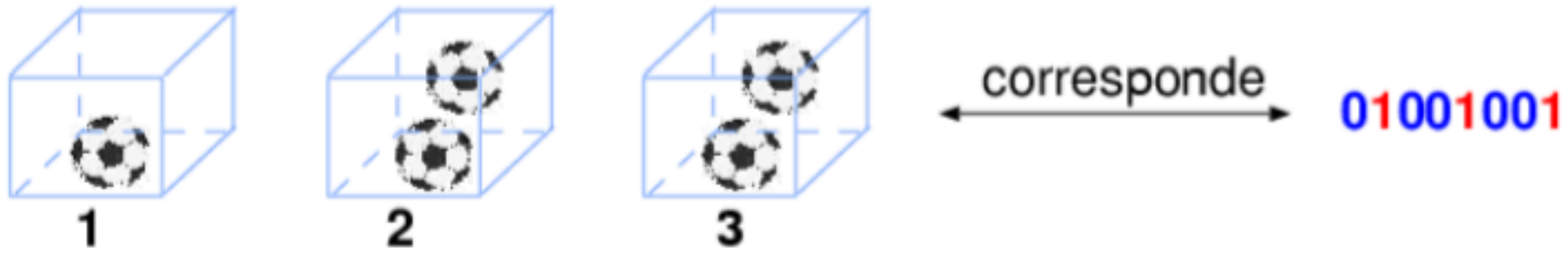


Uma possibilidade do problema está associada a uma sequência de 3 + 5 binários, finalizada em 1 com o seguinte significado:

Número de 0's à esquerda do primeiro 1: número de bolas na caixa 1

Exemplo 3 (continuação):

- Ilustração 1

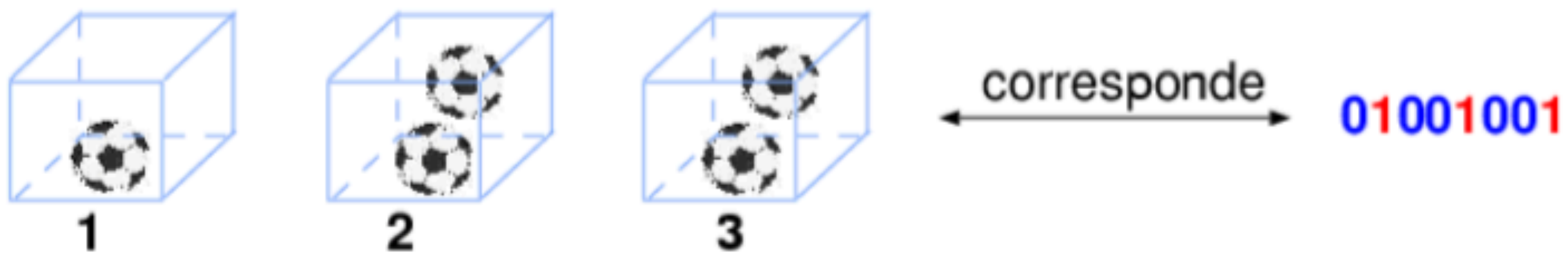


Uma possibilidade do problema está associada a uma sequência de 3 + 5 binários, finalizada em 1 com o seguinte significado:

Número de 0's à esquerda do primeiro 1: número de bolas na caixa 1
Número de 0's entre o primeiro 1 e o segundo 1: número de bolas na caixa 2

Exemplo 3 (continuação):

- Ilustração 1



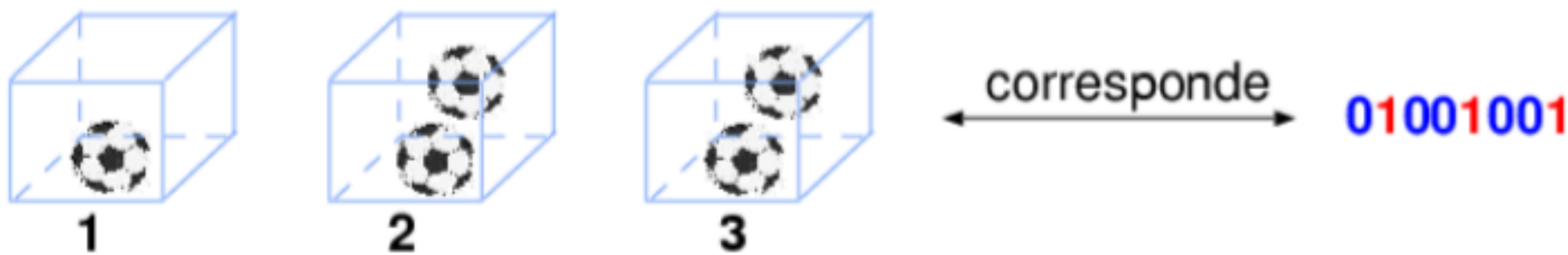
Uma possibilidade do problema está associada a uma sequência de 3 + 5 binários, finalizada em 1 com o seguinte significado:

Número de 0's à esquerda do primeiro 1: número de bolas na caixa 1
Número de 0's entre o primeiro 1 e o segundo 1: número de bolas na caixa 2
Número de 0's entre o segundo e o último 1: número de bolas na última caixa

Combinações com repetição

Exemplo 3 (continuação):

- Ilustração 1



Uma possibilidade do problema está associada a uma sequência de 3 + 5 binários, finalizada em 1 com o seguinte significado:

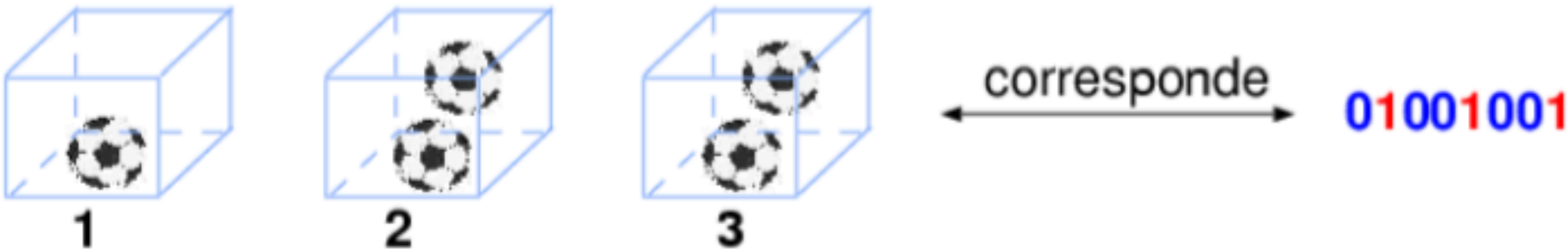
Número de 0's à esquerda do primeiro 1: número de bolas na caixa 1
Número de 0's entre o primeiro 1 e o segundo 1: número de bolas na caixa 2
Número de 0's entre o segundo e o último 1: número de bolas na última caixa

- Ilustração 2

00010011

Exemplo 3 (continuação):

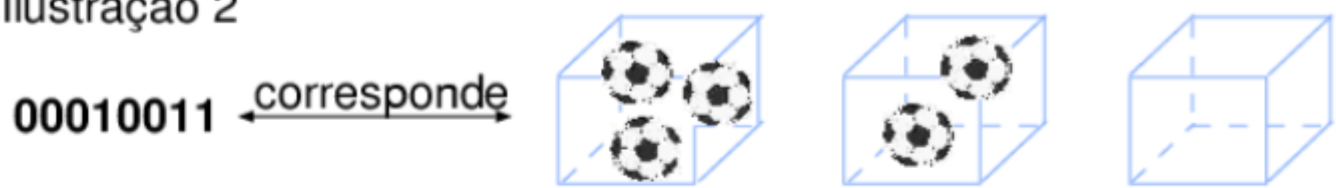
- Ilustração 1



Uma possibilidade do problema está associada a uma sequência de 3 + 5 binários, finalizada em 1 com o seguinte significado:

Número de 0's à esquerda do primeiro 1: número de bolas na caixa 1
Número de 0's entre o primeiro 1 e o segundo 1: número de bolas na caixa 2
Número de 0's entre o segundo e o último 1: número de bolas na última caixa

- Ilustração 2



Combinações com repetição

Exemplo 3 (modelo matemático):

- Reformulação 1

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's (bolas) e três 1's (caixas) que finalizem em 1?

Combinações com repetição

Exemplo 3 (modelo matemático):

- Reformulação 1

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's (bolas) e três 1's (caixas) que finalizem em 1?

- Reformulação 2

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's e dois 1's?

Combinações com repetição

Exemplo 3 (modelo matemático):

- Reformulação 1

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's (bolas) e três 1's (caixas) que finalizem em 1?

- Reformulação 2

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's e dois 1's?

Resposta dos problemas reformulados:

O número de seqüências é $C(7,2) = 21$

Exemplo 3 (modelo matemático):

- Reformulação 1

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's (bolas) e três 1's (caixas) que finalizem em 1?

- Reformulação 2

  Quantas seqüências podemos formar com cinco 0's e dois 1's?

Resposta dos problemas reformulados:

O número de seqüências é $C(7, 2) = 21$

Resposta do problema:

Podemos colocar 5 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas de 21 modos diferentes.

Combinações com repetição

Exemplo 4:

De quantos modos podemos selecionar 5 caixas escolhendo entre caixas de 3 cores diferentes?

Combinações com repetição

Exemplo 4:

De quantos modos podemos selecionar 5 caixas escolhendo entre caixas de 3 cores diferentes?

Resolução:

- Ilustração

Combinações com repetição

Exemplo 4:

De quantos modos podemos selecionar 5 caixas escolhendo entre caixas de 3 cores diferentes?

Resolução:

- Ilustração

Possibilidades

1. 

Combinações com repetição

Exemplo 4:

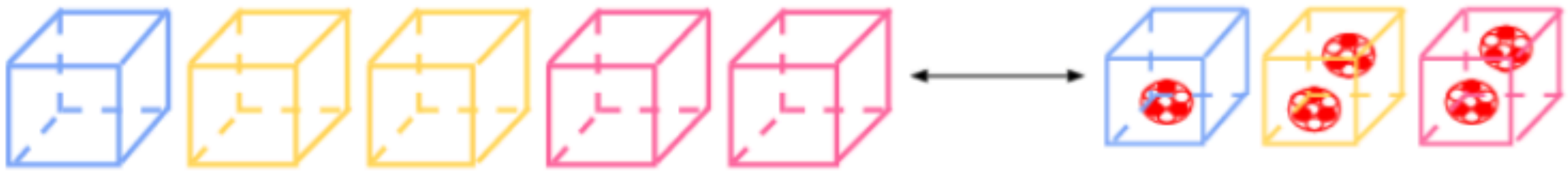
De quantos modos podemos selecionar 5 caixas escolhendo entre caixas de 3 cores diferentes?

Resolução:

- Ilustração

Possibilidades

1.

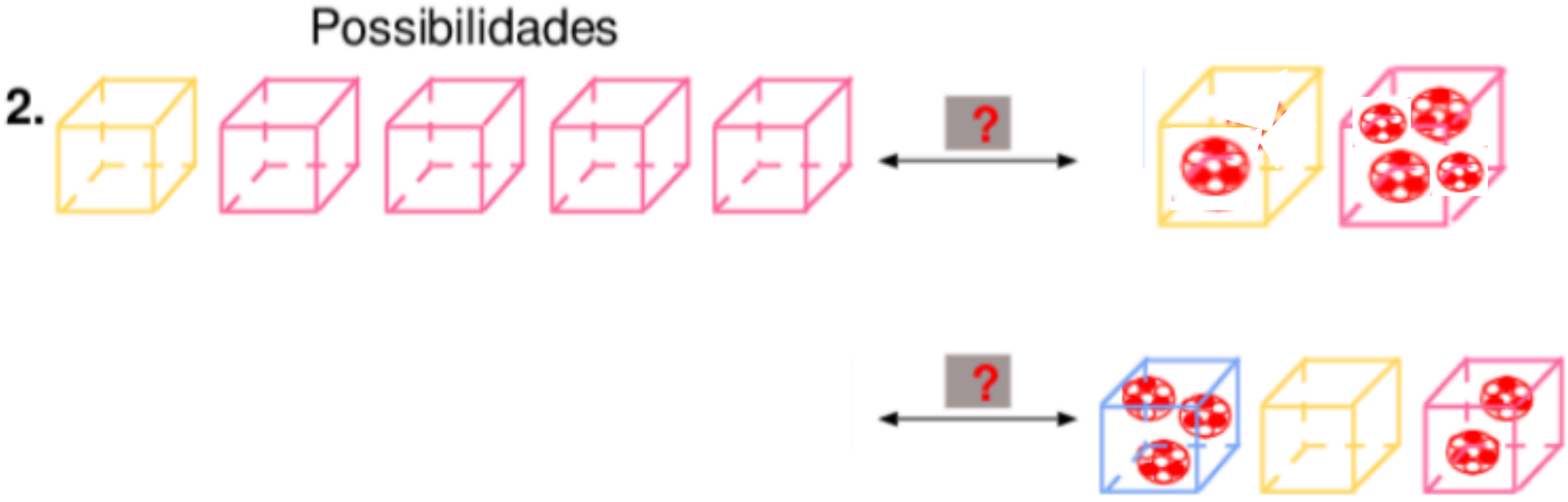


Exemplo 4 (continuação):

Combinações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

Exemplo 4 (continuação):



Combinações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

Combinações com repetição

Exemplo 4 (continuação):

- Conclusão

  O problema tem a mesma resolução que o exemplo 3.

  (Os problemas dos exemplos 3 e 4 são equivalentes)

Combinações com repetição

Exemplo 5:

De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em casquinha de 1 sabor em uma loja que oferece 7 sabores diferentes?

Exemplo 5:

De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em casquinha de 1 sabor em uma loja que oferece 7 sabores diferentes?

Resolução:

- Ilustração

Possibilidade 1

S_1 S_2 S_2 S_7

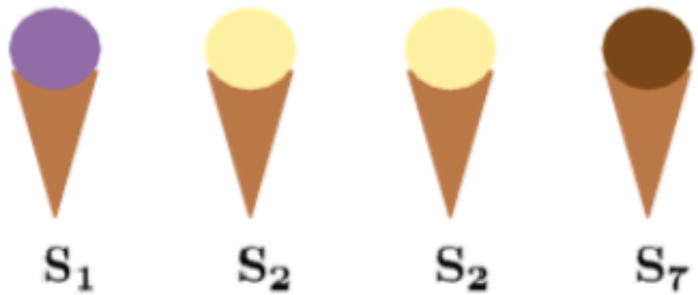
Exemplo 5:

De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em casquinha de 1 sabor em uma loja que oferece 7 sabores diferentes?

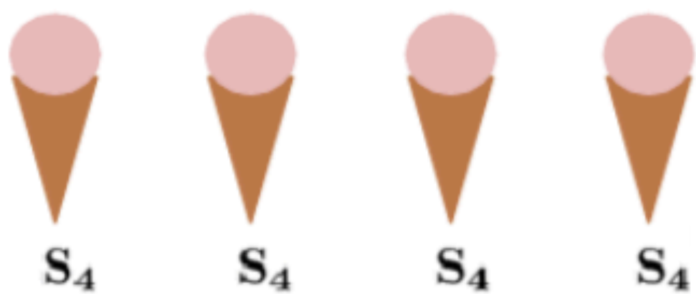
Resolução:

- Ilustração

Possibilidade 1



Possibilidade 2



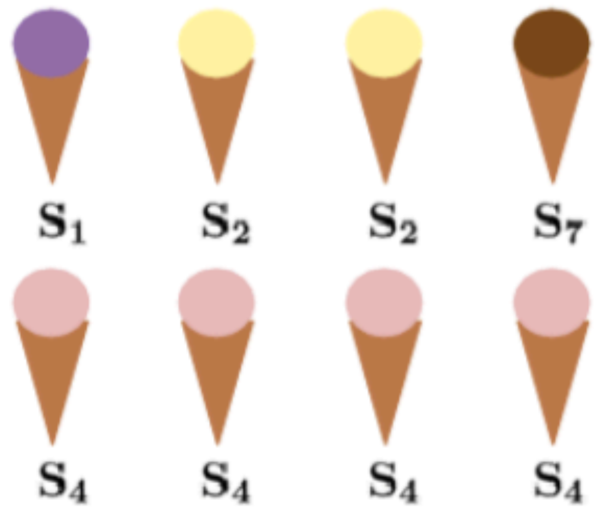
Combinações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

- Ilustração

Possibilidade 1

Possibilidade 2



Representação matemática

Sabores: objetos diferentes

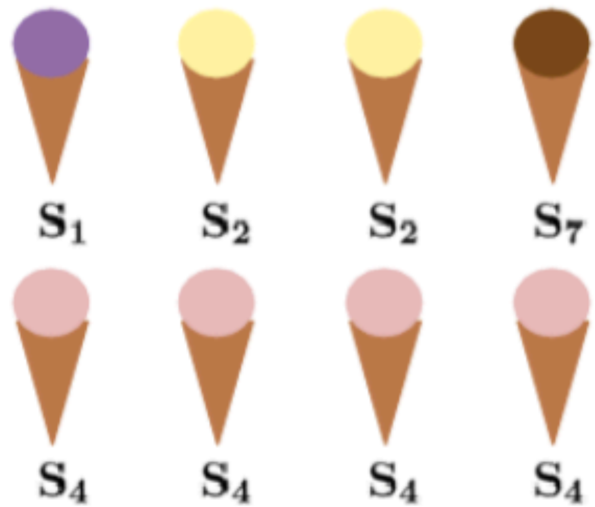
Casquinhas: objetos iguais

Exemplo 5 (continuação):

- Ilustração

Possibilidade 1

Possibilidade 2



Representação matemática

Sabores: objetos diferentes $\xleftrightarrow{(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_7)}$ 1

Casquinhas: objetos iguais

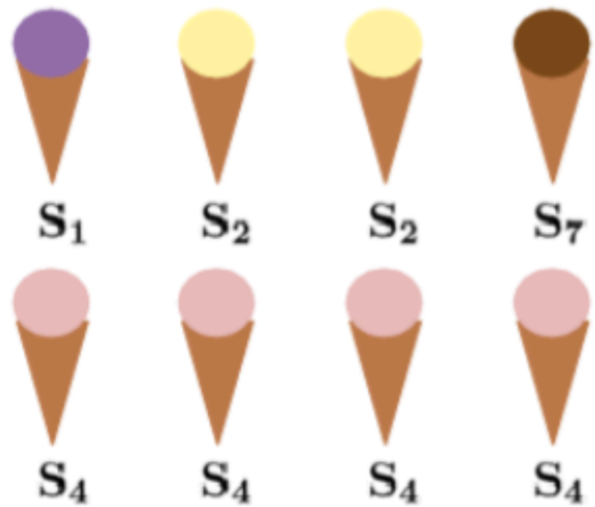
Combinações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

- Ilustração

Possibilidade 1

Possibilidade 2



Representação matemática

Sabores: objetos diferentes $\xleftrightarrow{(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_7)}$ 1

Casquinhas: objetos iguais $\longleftrightarrow$ 0

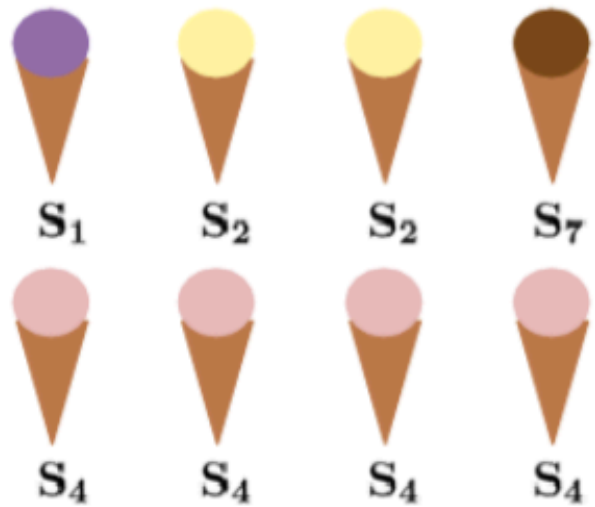
Combinações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

- Ilustração

Possibilidade 1

Possibilidade 2



Representação matemática

Sabores: objetos diferentes $\xleftrightarrow{(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_7)}$ 1

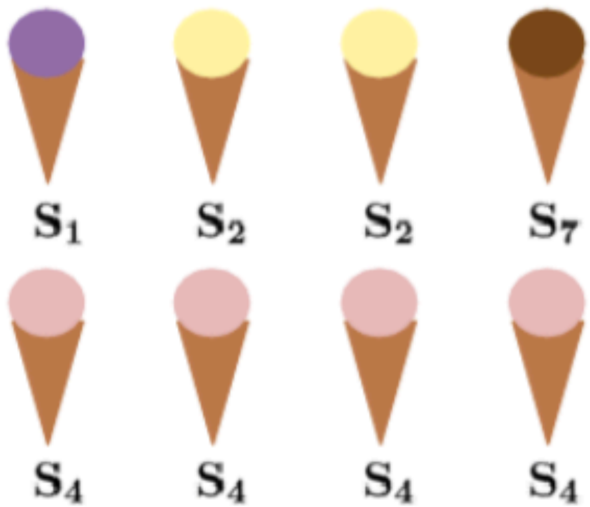
Casquinhas: objetos iguais $\longleftrightarrow$ 0

Possibilidade: seqüência de quatro 0's e sete 1's finalizada em 1

Exemplo 5 (continuação):

- Ilustração

Possibilidade 1



$\longleftrightarrow$ **01001111101**

Possibilidade 2

Representação matemática

Sabores: objetos diferentes $\xleftrightarrow{(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_7)}$ 1

Casquinhas: objetos iguais $\longleftrightarrow$ 0

Possibilidade: seqüência de quatro 0's e sete 1's finalizada em 1

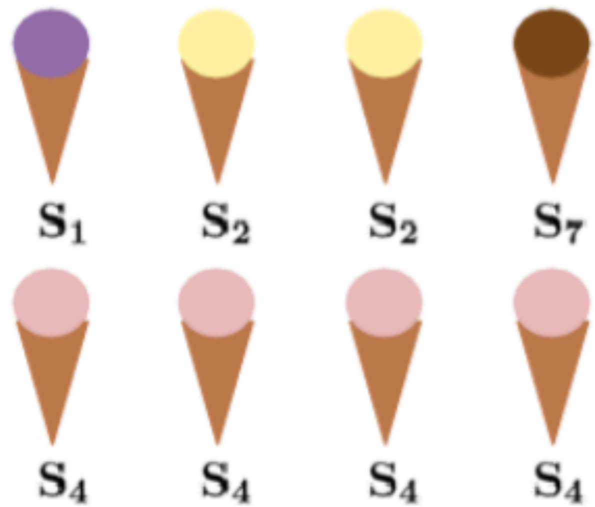
Combinações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

- Ilustração

Possibilidade 1 $\longleftrightarrow$ **01001111101**

Possibilidade 2 $\longleftrightarrow$ **11100001111**



Representação matemática

Sabores: objetos diferentes $\xleftrightarrow{(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_7)}$ 1

Casquinhas: objetos iguais $\longleftrightarrow$ 0

Possibilidade: seqüência de quatro 0's e sete 1's finalizada em 1

Exemplo 5 (continuação):

Reformulação matemática

Seja N o número de seqüências que podem ser formadas com quatro 0's e sete 1's finalizadas em 1. Calcular N.

Combinações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Reformulação matemática

Seja N o número de seqüências que podem ser formadas com quatro 0's e sete 1's finalizadas em 1. Calcular N.

- Ilustração

1 possibilidade: **10101100111**

Combinações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Reformulação matemática

Seja N o número de seqüências que podem ser formadas com quatro 0's e sete 1's finalizadas em 1. Calcular N.

- Ilustração

1 possibilidade: **10101100111** ⟷ 

Exemplo 5 (continuação):

Reformulação matemática

Seja N o número de seqüências que podem ser formadas com quatro 0's e sete 1's finalizadas em 1. Calcular N.

- Ilustração

1 possibilidade: **10101100111** ⟷

Resposta matemática:

$$N = C(4+7-1, 7-1) = C(10,4) = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

número de 0's

número de 1's

fixada a última posição com 1

Combinações com repetição

Exemplo 5 (continuação):

Reformulação matemática

Seja N o número de seqüências que podem ser formadas com quatro 0's e sete 1's finalizadas em 1. Calcular N.

- Ilustração

1 possibilidade: **10101100111** $\longleftrightarrow$

Resposta matemática:

$$N = C(4+7-1, 7-1) = C(10,4) = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$$

número de 0's — número de 1's — fixada a última posição com 1

Resposta do problema:

Temos 210 modos diferentes de escolher 4 sorvetes de um sabor entre 7 sabores diferentes.

Combinações com repetição

1 - Reformulação do exemplo 5:

De quantos modos podemos escolher 4 sabores, que podem ser repetidos, entre 7 sabores diferentes.

Combinações com repetição

1 - Reformulação do exemplo 5:

De quantos modos podemos escolher 4 sabores, que podem ser repetidos, entre 7 sabores diferentes.

- Ilustração

Casquinhas

equivale

Sabores

$S_2 \quad S_3 \quad S_5 \quad S_5$

Combinações com repetição

1 - Reformulação do exemplo 5:

De quantos modos podemos escolher 4 sabores, que podem ser repetidos, entre 7 sabores diferentes.

- Ilustração

2 - Os exemplos 3, 4 e 5 estão associados ao mesmo modelo matemático (exemplo 2) correspondente a seqüências de 0's e 1's finalizadas em 1.

Combinações com repetição

Observações (continuação):

3 - Os exemplos 3 e 5 que consideram dois tipos de objetos (3 caixas diferentes e 5 bolas, 7 sabores diferentes e 4 casquinhas) são equivalentes a problemas que trabalham com os mesmos tipos de objetos diferentes (caixas, sabores), considerando possíveis repetições dos mesmos (5 caixas, 4 sabores)

Combinações com repetição

- Características dos exemplos
  - Consideram-se n objetos diferentes

Combinações com repetição

- Características dos exemplos
  - Consideram-se n objetos diferentes (3 caixas, 7 sabores)

Combinações com repetição

- Características dos exemplos
  - Consideram-se n objetos diferentes (3 caixas, 7 sabores)
  - Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos

Combinações com repetição

- Características dos exemplos
  - Consideram-se n objetos diferentes
    (3 caixas, 7 sabores)
  - Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos
    (5 caixas, 4 sabores)

Combinações com repetição

- Características dos exemplos
  - Consideram-se n objetos diferentes (associados a 1)
    (3 caixas, 7 sabores)
  - Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos
    (5 caixas, 4 sabores)

Combinações com repetição

- Características dos exemplos
  - Consideram-se n objetos diferentes (associados a 1)
    (3 caixas, 7 sabores)
  - Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos (associados a 0)
    (5 caixas, 4 sabores)

Combinações com repetição

Características dos exemplos

- Consideram-se n objetos diferentes (associados a 1)
  (3 caixas, 7 sabores)
- Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos (associados a 0)
  (5 caixas, 4 sabores)
- Cada possibilidade está associada a uma seqüência de $n + r$ binários finalizada em 1, onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes.

Combinações com repetição

Características dos exemplos

- Consideram-se n objetos diferentes (associados a 1)
  (3 caixas, 7 sabores)
- Entre os n objetos dados escolhem-se r que podem ser repetidos (associados a 0)
  (5 caixas, 4 sabores)
- Cada possibilidade está associada a uma seqüência de $n + r$ binários finalizada em 1, onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes.
- Na obtenção do número de possibilidades aplica-se os princípios aditivo e multiplicativo (usa-se combinações simples ou permutações com repetição).

Combinações com repetição

Definição

Considere n objetos <u>diferentes</u> a_1, a_2, …, a_n. Uma combinação com repetição de n objetos tomados r a r é uma seleção de objetos, distintos ou não, escolhidos entre os n objetos dados.

Combinações com repetição

Definição

Considere n objetos diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Uma combinação com repetição de n objetos tomados r a r é uma seleção de objetos, distintos ou não, escolhidos entre os n objetos dados.

- Ilustração:

Exemplo 4:

objetos: caixas diferentes (azul, amarela, rosa)

$n = 3, \; r = 5$

Combinações com repetição

Definição

Considere n objetos diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Uma combinação com repetição de n objetos tomados r a r é uma seleção de objetos, distintos ou não, escolhidos entre os n objetos dados.

- Ilustração:

Exemplo 4:

objetos: caixas diferentes (azul, amarela, rosa)

$n = 3, \ r = 5$

Uma combinação com repetição de 3 tomados 5 a 5

Definição

Considere n objetos <u>diferentes</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Uma combinação com repetição de n objetos tomados r a r é uma seleção de objetos, distintos ou não, escolhidos entre os n objetos dados.

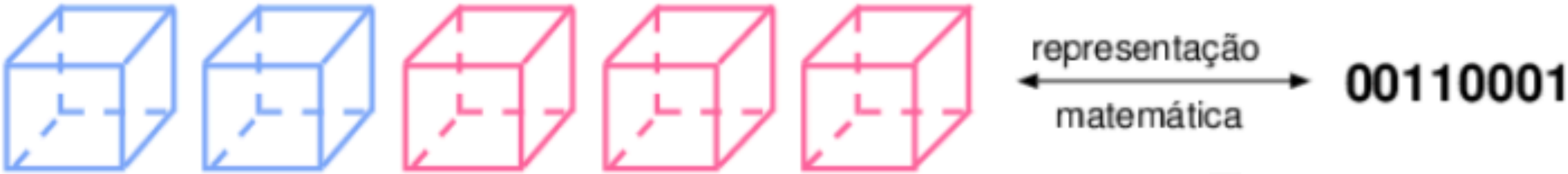
- Ilustração:

Exemplo 4:

objetos: caixas diferentes (azul, amarela, rosa)

$n = 3, \ r = 5$

Uma combinação com repetição de 3 tomados 5 a 5



Combinações com repetição

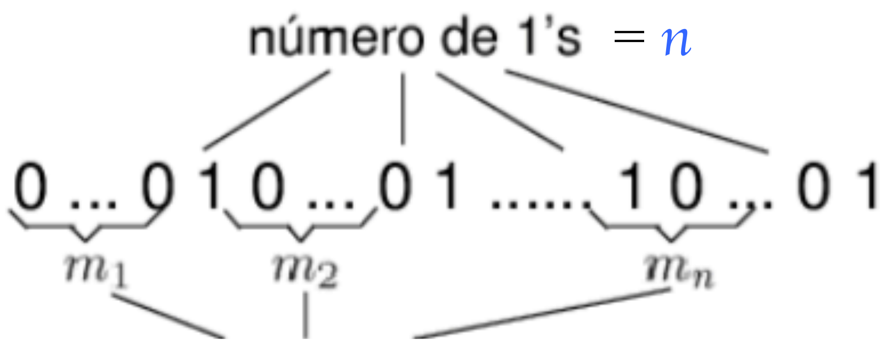
Atenção

Cada combinação com repetição de n objetos <u>diferentes</u> a_1, a_2, …, a_n, selecionados r a r, repetidos ou não, está associado a uma sequência de n + r binários finalizada em 1, onde o número 0 aparece r vezes e o número 1 aparece n vezes.

Combinações com repetição

Atenção

Cada combinação com repetição de n objetos <u>diferentes</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$, selecionados r a r, repetidos ou não, está associado a uma sequência de $n + r$ binários finalizada em 1, onde o número 0 aparece r vezes e o número 1 aparece n vezes.

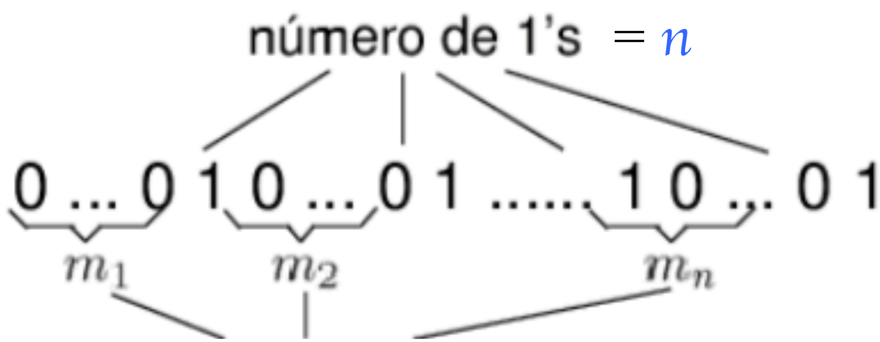


m_i := número de 0's = números de repetições de 0's, i=1,…, n

Combinações com repetição

Atenção

Cada combinação com repetição de n objetos <u>diferentes</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$, selecionados r a r, repetidos ou não, está associado a uma sequência de $n + r$ binários finalizada em 1, onde o número 0 aparece r vezes e o número 1 aparece n vezes.



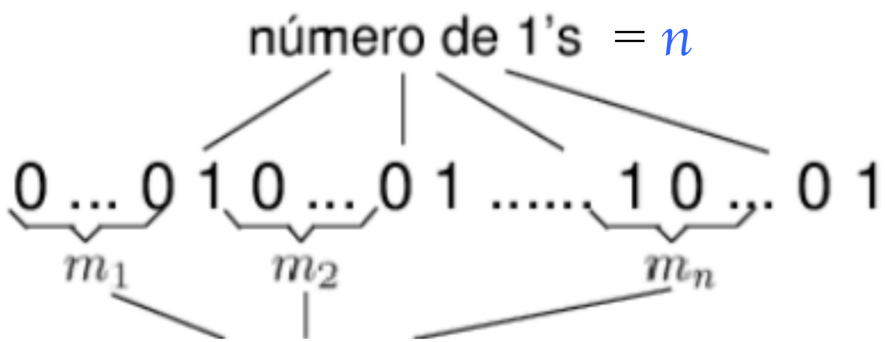
m_i := número de 0's = números de repetições de 0's, i=1,…, n

$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = r$, $0 \leq m_i \leq r$, i=1, …, n

Combinações com repetição

Atenção

Cada combinação com repetição de n objetos <u>diferentes</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$, selecionados r a r, repetidos ou não, está associado a uma sequência de $n + r$ binários finalizada em 1, onde o número 0 aparece r vezes e o número 1 aparece n vezes.



m_i := número de 0's = números de repetições de 0's, $i=1,\ldots, n$

$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = r$, $0 \leq m_i \leq r$, $i=1, \ldots, n$

- Observação: $r \leq n$ ou $r > n$

Número de combinações com repetição:

Problema

Dados n objetos diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$

encontrar o número de combinações com repetição

de n objetos tomados r a r .

Número de combinações com repetição:

Problema

Dados n objetos diferentes $a_1, a_2, \ldots, a_n$
encontrar o número de combinações com repetição
de n objetos tomados r a r .

Modelo matemático do problema

Encontrar o número de seqüências de $n + r$ binários finalizadas em 1 onde o 0 está repetido r vezes e o 1 está repetido n vezes.

Combinações com repetição

Propriedade

O número de combinações com repetição de n objetos tomados r a r , denominado CR_n^r , é dado por

$$\mathrm{CR}_n^r = \mathrm{C}(n+r-1, r) = \mathrm{C}(n+r-1, n-1)$$

Combinações com repetição

Propriedade

O número de combinações com repetição de n objetos tomados r a r , denominado CR_n^r , é dado por

$$\mathrm{CR}_n^r = \mathrm{C}(n+r-1, r) = \mathrm{C}(n+r-1, n-1)$$

Ilustração:

Exemplo 3:

$$n = 3,\ r = 5$$

$$\mathrm{CR}_3^5 = \mathrm{C}(3+5-1, 5) = \mathrm{C}(7, 2) = 21$$

Combinações com repetição

Exemplo 6:

Se jogarmos 10 moedas iguais, quantos resultados diferentes de cara e coroa podem ser obtidos?

Combinações com repetição

Exemplo 6:

Se jogarmos 10 moedas iguais, quantos resultados diferentes de cara e coroa podem ser obtidos?

Resolução:

elementos distintos:

Exemplo 6:

Se jogarmos 10 moedas iguais, quantos resultados diferentes de cara e coroa podem ser obtidos?

Resolução:

elementos distintos: $\underbrace{\text{cara}}_{a_1}, \underbrace{\text{coroa}}_{a_2}$

Exemplo 6:

Se jogarmos 10 moedas iguais, quantos resultados diferentes de cara e coroa podem ser obtidos?

Resolução:

elementos distintos: $\underbrace{\text{cara}}_{a_1}, \underbrace{\text{coroa}}_{a_2}$

$n = 2, \; r = 10$

Combinações com repetição

Exemplo 6:

Se jogarmos 10 moedas iguais, quantos resultados diferentes de cara e coroa podem ser obtidos?

Resolução:

elementos distintos: $\underbrace{\text{cara}}_{a_1}, \underbrace{\text{coroa}}_{a_2}$

$n = 2, \; r = 10$

Resposta:

O número de resultados diferentes que podem ser obtidos é $\mathrm{CR}_2^{10} = \mathrm{C}(10 + 2 - 1, 10) = \mathrm{C}(11, 10) = 11$

Combinações com repetição

Observação:

Problema similar

De quantos modos podemos colocar 10 bolas em 2 caixas?

Combinações com repetição

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Combinações com repetição

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 associados às variáveis x, y, z, w respectivamente

Combinações com repetição

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 associados às variáveis x, y, z, w respectivamente

- Ilustraçao: 1 solução (1 possibilidade)

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 0,\ w = 2$$

Combinações com repetição

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 associados às variáveis x, y, z, w respectivamente

- Ilustraçao: 1 solução (1 possibilidade)

$x = 3,\ y = 4,\ z = 0,\ w = 2$

Interpretação da solução:

$x = 3$: 3 unidades do elemento a_1

$y = 4$: 4 unidades do elemento a_2

$z = 0$: 0 unidades do elemento a_3

$w = 2$: 2 unidades do elemento a_4

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 associados às variáveis x, y, z, w respectivamente

- Ilustraçao: 1 solução (1 possibilidade)

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 0,\ w = 2 \longleftrightarrow \underbrace{a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2\ a_4\ a_4}_{9}$$

Interpretação da solução:

$x = 3$: 3 unidades do elemento a_1
$y = 4$: 4 unidades do elemento a_2
$z = 0$: 0 unidades do elemento a_3
$w = 2$: 2 unidades do elemento a_4

Combinações com repetição

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 associados às variáveis x, y, z, w respectivamente

- Ilustraçao: 1 solução (1 possibilidade)

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 0,\ w = 2 \longleftrightarrow \underbrace{a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2\ a_4\ a_4}_{9}$$

Interpretação da solução:

$x = 3$: 3 unidades do elemento a_1

$y = 4$: 4 unidades do elemento a_2

$z = 0$: 0 unidades do elemento a_3

$w = 2$: 2 unidades do elemento a_4

$n = 4,\ r = 9$

Combinações com repetição

Exemplo 7:

Quantas são as soluções inteiras não negativas da equação
$x + y + z + w = 9$?

Resolução: elementos diferentes:

4 objetos distintos a_1, a_2, a_3, a_4 associados às variáveis x, y, z, w respectivamente

- Ilustraçao: 1 solução (1 possibilidade)

$$x = 3,\ y = 4,\ z = 0,\ w = 2 \longleftrightarrow \underbrace{a_1\ a_1\ a_1\ a_2\ a_2\ a_2\ a_2\ a_4\ a_4}_{9}$$

Interpretação da solução:

$x = 3$: 3 unidades do elemento a_1

$y = 4$: 4 unidades do elemento a_2

$z = 0$: 0 unidades do elemento a_3

$w = 2$: 2 unidades do elemento a_4

$n = 4,\ r = 9$

Resposta: O número de soluções inteiras não negativas da equação dada $CR_4^9 = C(9+4-1, 9) = \frac{12!}{9!\,3!} = 220$

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Combinações com repetição

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução: $\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

Combinações com repetição

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução: $\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ é equivalente a $x_1 + (x_2 - 4) + x_3 = 10 - 4$

Combinações com repetição

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução: $\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ é equivalente a $x_1 + \underbrace{(x_2 - 4)}_{y_2} + x_3 = 10 - 4$

Combinações com repetição

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução: $\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ é equivalente a $x_1 + \underbrace{(x_2 - 4)}_{y_2} + x_3 = 10 - 4$

Problema original

encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_2 > 3$$

(a)

Problema reformulado

encontrar $x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

$$x_1 + y_2 + x_3 = 6$$

(b)

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução: $\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ é equivalente a $x_1 + \underbrace{(x_2 - 4)}_{y_2} + x_3 = 10 - 4$

Problema original		Problema reformulado
encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$ $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ $x_2 > 3$	$(y_2 = x_2 - 4)$ → ← $(x_2 = y_2 + 4)$	encontrar $x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$ $x_1 + y_2 + x_3 = 6$
(a)		(b)

Exemplo 8:

Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde $x_2 > 3$.

Resolução: $\mathbb{Z}_+ := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10$ é equivalente a $x_1 + \underbrace{(x_2 - 4)}_{y_2} + x_3 = 10 - 4$

Problema original		Problema reformulado
encontrar $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$ $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ $x_2 > 3$	$\xleftarrow[(x_2 = y_2 + 4)]{(y_2 = x_2 - 4)}$	encontrar $x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$ $x_1 + y_2 + x_3 = 6$
(a)		(b)

- Ilustração:

$$\underbrace{x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 4}_{\text{é uma solução de (a)}} \quad \xleftarrow[(x_2 = 0 + 4)]{(y_2 = 4 - 4)} \quad \underbrace{x_1 = 2, y_2 = 0, x_3 = 4}_{\text{é uma solução de (b)}}$$

Exemplo 8 (continuação):

- Resolução do problema reformulado

$$x_1 + y_2 + x_3 = 6, \quad x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$$

Combinações com repetição

Exemplo 8 (continuação):

- Resolução do problema reformulado

  $x_1 + y_2 + x_3 = 6, \quad x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

  elementos diferentes: **3** (associados a x_1, x_2 , x_3)

  $n = 3, \ r = 6$

Combinações com repetição

Exemplo 8 (continuação):

- Resolução do problema reformulado

  $x_1 + y_2 + x_3 = 6, \quad x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

  elementos diferentes: 3 (associados a x_1, x_2 , x_3)

  $n = 3, \; r = 6$

  Resposta do problema reformulado

  O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + y_2 + x_3 = 6$ é:

$$CR_3^6 = C(3+6-1,6) = \frac{8!}{6!\ 2!} = 28$$

Combinações com repetição

Exemplo 8 (continuação):

- Resolução do problema reformulado

  $x_1 + y_2 + x_3 = 6, \quad x_1, y_2, x_3 \in \mathbb{Z}_+$

  elementos diferentes: **3** (associados a x_1, x_2 , x_3)

  $n = 3, \; r = 6$

  Resposta do problema reformulado

  O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + y_2 + x_3 = 6$ é:

$$CR_3^6 = C(3+6-1, 6) = \frac{8!}{6!\;2!} = 28$$

  Resposta do problema

  O número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ com $x_3 > 3$ $CR_3^6 = 28$

Combinações com repetição

Desafios:

(1) Coloque o enunciado de um problema similar ao do exemplo 8 em termos de caixas e bolas.

(2) Escreva a sequência binária correspondente a $x_1 = 2$ $x_2 = 4$, $x_3 = 4$ do problema 8.

Desafios:

(1) Coloque o enunciado de um problema similar ao do exemplo 8 em termos de caixas e bolas.

De quantos modos podemos colocar 10 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas, sendo que a segunda caixa precisa ter pelo menos 4 bolas?

(2) Escreva a sequência binária correspondente a $x_1 = 2$ $x_2 = 4$, $x_3 = 4$ do problema 8.

Combinações com repetição

Desafios:

(1) Coloque o enunciado de um problema similar ao do exemplo 8 em termos de caixas e bolas.

De quantos modos podemos colocar 10 bolas de igual cor em 3 caixas numeradas, sendo que a segunda caixa precisa ter pelo menos 4 bolas?

(2) Escreva a sequência binária correspondente a $x_1 = 2$ $x_2 = 4$, $x_3 = 4$ do problema 8.

0010000100001

Exemplo 9:

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y \leq 5$?

Combinações com repetição

Exemplo 9:

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y \leq 5$?

Resolução:

Tente resolver o problema observando que:

Combinações com repetição

Exemplo 9:

Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y \leq 5$?

Resolução:

Tente resolver o problema observando que:

$x, y \in \mathbb{Z}_+$ é uma solução se verifica:

$x + y = 5$ ou $x + y = 4$ ou $x + y = 3$ ou

$x + y = 2$ ou $x + y = 1$ ou $x + y = 0$